Title	状態観測の不完全なセミマルコフ決定過程について (マルコフ・ゲーム理論とその周辺)
Author(s)	涌田, 和芳
Citation	数理解析研究所講究録 (1982), 460: 198-213
Issue Date	1982-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/103108
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
460巻 1982年 198-213

状態観測の不完全なセミマルコフ決定過程について

長岡工業高専　　湧田和芳

§1. 序

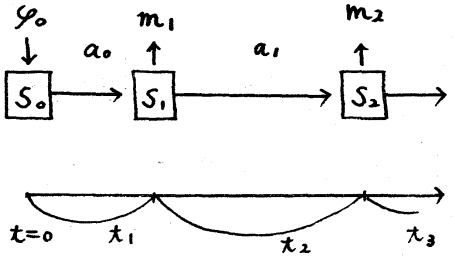
ここでは，状態観測の不完全なセミマルコフ決定過程について述べる（これをSMDP-IIと表わし，通常のセミマルコフ決定過程はSMDP-Iと表わす）．簡単にこの問題をふりかえってみよう．状態観測の不完全なマルコフ決定過程（これをMDP-IIと表わす）は多くの人々により研究された．Dynkin [4] とShiryaev [9] は数理統計学より生じた部分的観測ランダム列の制御を研究した．Åström [1] は，有限段階のMDP-IIを扱った．また，Bellman [2] でも確率過程の部分的観測について言及している．Sawaragi and Yoshikawa [8] は，これらの研究とBlackwell [3]，Strauch [11] の研究との関連を明確にした．Rhenius [6] は，非定常で一般の状態空間をもつ場合を扱った．Sondik [10]，Sawaki and Ichikawa [7] は，ε-最適政策を求めるアルゴリズムを，それぞれ，政策改良法と逐次近似法より求めた．Kurano [5] は，平均基準を扱った．一方，MDP-IIでは，各状態での滞在時間はつねに1単位時間であるが，この制約を除いてC.C. White [13] はSMDP-IIについて研究した．そこでは，有限段階で離散時間（整数値上でのみ推移が起る）の場合が扱われた．ここでは，無限段階で（

離散時間を含む）より一般的な推移の場合について述べる．

§2．定義と準備

X，Yはボレル集合とする（ボレル集合とは完備可分距離空間のボレル部分集合をいう）．このとき，X上のすべての確率測度をP(X)で表わし，Xが与えられたときのYの条件付確率測度のすべてをQ(Y|X)で表わす．また，X上のすべての有界ボレル可測関数をM(X)で表わす．

SMDP-IIは（S, M, A, p_s, p_t, g, φ_0, c, α）により決定される．S，Mは可算集合で，それぞれ，システムの状態集合，観測信号の集合．Aはボレル集合で，行動集合．$p_s \in Q(S|SA)$は，状態の推移確率．$p_t \in Q(R_+|SAS)$ （$R_+ \equiv [0,+\infty)$）は，状態の滞在時間分布．p_tは，あるσ有限測度λに関して，密度関数$f(t|s,a,s')$をもち，fは(t,s,a,s')に関してボレル可測とする．$g \in Q(M|S)$は観測信号を伝える確率．$\varphi_0 \in \mathfrak{P}$ （$\mathfrak{P} \equiv P(S)$）はシステムの初期分布．$c \in M(R_+SA)$はコスト関数．α（$\alpha > 0$）は割引因子．



第1区間でのコスト $\int_0^{t_1} c(t, s_0, a_0) e^{-\alpha t} dt$

第2区間でのコスト $e^{-\alpha t_1} \int_0^{t_2} c(t, s_1, a_1) e^{-\alpha t} dt$

・・・

次の条件を全体を通して仮定する.

条件1.

$$\sum_{s'} \phi_t([0,\delta] \mid s, a, s') \phi_s(s' \mid s, a) \leq 1-\varepsilon \quad (\forall s, a)$$

なる $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ が存在する.

政策は $\omega = \{\omega_0, \omega_1, \cdots\}$ と表わされる. ここで, $\omega_n \in Q(A \mid H_n)$, $H_n \equiv 直(AR_+H)^n$ $(\forall n)$ である. 政策 ω を用いたときの期待合計割引コストは,

$$J_\omega^\alpha(\varphi_0) \equiv E_\omega\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha(t_1+\cdots+t_n)} \int_0^{t_{n+1}} c(t, s_n, a_n) e^{-\alpha t} dt \,\middle|\, \varphi_0\right]$$

で与えられる. ここで, $E_\omega[\cdot \mid \varphi_0]$ は

$$\phi_\omega\{\cdot \mid \varphi_0\} \equiv g^P \otimes \bigotimes_{n=0}^{\infty} (\omega_n \otimes \phi_s \otimes \phi_t \otimes g)$$

ただし, $g^P(s_0 \mid \varphi_0) \equiv \varphi_0(s_0)$

による条件付期待値である. 我々の目的は, すべての政策の中で, $J_\omega^\alpha(\varphi_0)$ を最小にすることである.

$$J_{\omega^*}^\alpha(\varphi_0) \leq \inf_\omega J_\omega^\alpha(\varphi_0) \quad (\forall \varphi_0)$$

ならば, ω^* は α-最適であるという.

システムの履歴 $h_n \equiv (\varphi_0, a_0, t_1, m_1, \cdots, m_n)$ が観測されたときの状態 s_n の条件付確率を $g_n(\cdot \mid h_n)$ で表わすと, ベイズの公式より

$$q_{n+1}(s_{n+1}\mid h_{n+1})$$

$$= q_{n+1}(s_{n+1}\mid h_n, a_n, t_{n+1}, m_{n+1})$$

$$(3.1) = \frac{\sum_{s_n} f(t_{n+1}\mid s_n, a_n, s_{n+1})\, g(m_{n+1}\mid s_{n+1})\, p_\delta(s_{n+1}\mid s_n, a_n)\, q_n(s_n\mid h_n)}{\sum_{s_n}\sum_{s_{n+1}} [\quad 〃 \quad]}$$

ここで，$\varphi_n(s_n) \equiv q_n(s_n\mid h_n)$ $(\forall s_n)$ として，(3.1)をおきかえると $\varphi_{n+1}(s_{n+1}) = u(\varphi_n, a_n, t_{n+1}, m_{n+1})(s_{n+1})$ $(\forall s_{n+1})$ なるボレル可測写像 u：$\mathbb{R}AR_+M \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する．このuを繰り返し適用すれば，$h_n \equiv (\varphi_0, a_0, t_1, m_1, \cdots, m_n)$ に対して $b_n \equiv (\varphi_0, a_0, t_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ が定まる．この b_n にもとずく政策をI-政策という．すなわち，I-政策は，$\pi = \{\pi_0, \pi_{E_1}, \cdots\}$，$\pi_n \in Q(A\mid B_n)$，$B_n \equiv \mathbb{R}(AR_+\mathbb{R})^n$ $(\forall n)$ と表わされる．このI-政策πに対する期待合計割引コストは

$$I_\pi^\alpha(\varphi_0) \equiv \bar{E}_\pi\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha(t_1+\cdots+t_n)}\int_0^{t_{n+1}} c(t, s_n, a_n)\, e^{-\alpha t}\, dt \,\middle|\, \varphi_0\right]$$

で与えられる．ここで，$\bar{E}_\pi[\cdot\mid\varphi_0]$ は

$$\bar{p}_\pi\{\cdot\mid\varphi_0\} \equiv q^\dagger \otimes \bigotimes_{n=0}^{\infty}(\pi_n \otimes p_s \otimes p_t \otimes q \otimes u)$$

による条件付期待値である．政策ωに対しても同様に，$\bar{p}_\omega$，$\bar{E}_\omega$ を定義する．そうすると，J_ω^α は E_ω のかわりに $\bar{E}_\omega$ でおきかえて表わすことができる．

§3. 主な結果

命題1.

$$J_\omega^\alpha(\varphi_0) = \bar{E}_\omega\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha(t_1+\cdots+t_n)}\, \bar{c}_\alpha(\varphi_n, a_n)\,\middle|\,\varphi_0\right]$$

が成りたつ．ただし，

$$C_\alpha(t,s,a) \equiv \int_0^t c(\tau,s,a)\, e^{-\alpha\tau}\, d\tau,$$

$$\bar{C}_\alpha(\varphi,a) \equiv \sum_s \sum_{s'} \int_0^\infty C_\alpha(t,s,a)\, d\phi_\tau(t\,|\,s,a,s')\, \phi_s(s'\,|\,s,a)\, \varphi(s),$$

$$\varphi \in \Phi.$$

証明

$$J_\omega^\alpha(\varphi_0) = \bar{E}_\omega\Big[\sum_{n=0}^\infty e^{-\alpha(t_1+\cdots+t_n)} \int_0^{t_{n+1}} c(t,s_n,a_n)\, e^{-\alpha t}\, dt \,\Big|\, \varphi_0\Big]$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \bar{E}_\omega\Big[e^{-\alpha(t_1+\cdots+t_n)}\, \bar{E}_\omega\big[C_\alpha(t_{n+1},s_n,a_n)\,|\,h_n'\big]\,\Big|\,\varphi_0\Big]$$

ここで，$h_n' \equiv (\varphi_0, a_0, t_1, m_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, a_n)$．一方，

$$\bar{E}_\omega\big[C_\alpha(t_{n+1},s_n,a_n)\,|\,h_n'\big]$$

$$= \sum_{s_n}\sum_{s_{n+1}} \int_0^\infty C_\alpha(t,s_n,a_n)\, d\phi_t(t\,|\,s_n,a_n,s_{n+1})\, \phi_s(s_{n+1}\,|\,s_n,a_n)\, \varphi_n(s_n)$$

$$= \bar{C}_\alpha(\varphi_n,a_n).$$

ゆえに，命題が成りたつ．

注意 1．この命題はエー政策九に対しても成りたつ．

定理 3.1．任意に行動の列 $\{a_0,a_1,\cdots\}$ を固定し，a_n は n 番目の推移区間で選択される行動とする．このとき，過程 $\{\varphi_n, t_n ; n\in N\}$ は次の性質をもつ．

(i) 過程が φ_n にあるとき，次の推移が φ_{n+1} に起る確率 $\bar{q}$ は φ_n と a_n にだけ依存し，次式で与えられる．

$$\bar{q}(\Gamma\,|\,\varphi_n,a_n) = \sum_{s_n}\sum_{s_{n+1}}\sum_{m_{n+1}} \int_{\bar{\Gamma}_m} f(t_{n+1}\,|\,s_n,a_n,s_{n+1})\, d\lambda(t_{n+1})$$

$$\times\, g(m_{n+1}\,|\,s_{n+1})\, \phi_s(s_{n+1}\,|\,s_n,a_n)\, \varphi_n(s_n),$$

ただし，$\mathbb{E}$の任意のボレル部分集合Γに対して

$$\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}(\varphi_n, a_n; \Gamma) \equiv \{(t_{n+1}, m_{n+1});\ u(\varphi_n, a_n, t_{n+1}, m_{n+1}) \in \Gamma\}$$

$$\overline{\Gamma}_m = \overline{\Gamma}_m(\varphi_n, a_n, m_{n+1}; \Gamma) \equiv \{t_{n+1};\ u(\varphi_n, a_n, t_{n+1}, m_{n+1}) \in \Gamma\}.$$

(ii) 過程の次の状態がφ_{n+1}であるという条件の下でのφ_nでの滞在時間分布は，φ_n, a_n, φ_{n+1}にだけ依存し，次式を満す．

$$\int_{\mathbb{E}} \overline{F}(B \mid \varphi_n, a_n, \varphi_{n+1})\, d\overline{q}(\varphi_{n+1} \mid \varphi_n, a_n)$$
$$= \sum_{s_n} \sum_{s_{n+1}} \Phi_t(B \mid s_n, a_n, s_{n+1})\, \Phi_s(s_{n+1} \mid s_n, a_n)\, \varphi_n(s_n),$$

ただし，BはR_+の任意のボレル部分集合．

$\{\varphi_n, t_n;\ n \in N\}$は，$\overline{q}$と$\overline{F}$により定まるマルコフ再生過程である．

証明

$$P\{\varphi_{n+1} \in \Gamma,\ t_{n+1} \in B \mid \varphi_0, a_0, t_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, a_n\}$$
$$= P\{(t_{n+1}, m_{n+1}) \in \overline{\Gamma},\ t_{n+1} \in B \mid \ 〃\ \}$$
$$= \sum_{s_n} \sum_{s_{n+1}} P\{(t_{n+1}, m_{n+1}) \in \overline{\Gamma},\ t_{n+1} \in B \mid s_n, s_{n+1}, 〃\}$$
$$\times P\{s_{n+1} \mid s_n, 〃\}\, \varphi_n(s_n)$$
$$= \sum_{s_n} \sum_{s_{n+1}} \sum_{m_{n+1}} \int_{\overline{\Gamma}_m \cap B} f(t_{n+1} \mid s_n, a_n, s_{n+1})\, d\lambda(t_{n+1})$$
$$\times g(m_{n+1} \mid s_{n+1})\, \Phi_s(s_{n+1} \mid s_n, a_n)\, \varphi_n(s_n).$$

ここで，$B = R_+$とおけば(i)が得られる．また，

$$P\{\varphi_{n+1} \in \Gamma,\ t_{n+1} \in B \mid \varphi_n, a_n\}$$
$$= \int_{\Gamma} P\{t_{n+1} \in B \mid \varphi_n, a_n, \varphi_{n+1}\}\, dP\{\varphi_{n+1} \mid \varphi_n, a_n\}$$

が成りたつ．そこで，

$$\overline{p}(B \mid \varphi_n, a_n, \varphi_{n+1}) \equiv p\{t_{n+1} \in B \mid \varphi_n, a_n, \varphi_{n+1}\}$$

とおくと，この $\overline{p} \in Q(R_+ \mid \text{直} A \text{直})$ が次の状態が φ'_{n+1} であるという条件の下での φ_n での滞在時間分布を表わす．そして，(i)の証明より(ii)の式が成りたつ．更に，

$$\begin{aligned} & p\{\{\varphi_{n+1}, t_{n+1}\} \mid \varphi_0, a_0, t_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, a_n\} \\ &= p\{\{\varphi_{n+1}, t_{n+1}\} \mid \varphi_n, a_n\} \\ &= \overline{q} \otimes \overline{p}(\{\varphi_{n+1}, t_{n+1}\} \mid \varphi_n, a_n) \end{aligned}$$

が成りたつので，$\{\varphi_n, t_n ; n \in N\}$ は $\overline{q}$ と $\overline{p}$ により定まるマルコフ再生過程である．

定理 3.2. 任意の政策 ω に対して

$$J^{\pi}_{x}(\varphi_0) = J^{\omega}_{x}(\varphi_0) \quad (\forall \varphi_0)$$

なる I-政策 π が存在する．

証明 任意に与えられた政策 ω に対して I-政策 $\pi^{\omega} = \{\pi^{\omega}_0, \pi^{\omega}_1, \cdots\}$ を次のように定義する．

$$\pi^{\omega}_0(\{a_0\} \mid \varphi_0) \equiv \omega_0(\{a_0\} \mid \varphi_0)$$

$$\begin{aligned} & \pi^{\omega}_n(\{a_n\} \mid \varphi_0, a_0, t_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) \\ &\equiv \sum_{m_1, \cdots, m_n} \omega_n(\{a_n\} \mid \varphi_0, a_0, t_1, m_1, \cdots, m_n) \\ &\quad \times \overline{p}_{\omega}\{m_1, \cdots, m_n \mid \varphi_0, a_0, t_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}, \end{aligned}$$

ここで，$b^{h_n}_n \equiv (\varphi_0, a_0, t_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ は $h_n \equiv (\varphi_0, a_0, t_1, m_1, \cdots, m_n)$ に対応する．この π^{ω} の作り方から，ω と π^{ω} は A上で同一の条件付確率

$$\overline{P}_{\pi^\omega}\{\{a_n\}\mid \varphi_0, a_0, t_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\} = \overline{P}_\omega\{\{a_n\}\mid \text{〃}\}$$

を与える．一方，定理3.1.より，

$$\overline{P}_{\pi^\omega}\{\{\varphi_{n+1}, t_{n+1}\}\mid \varphi_0, a_0, t_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, a_n\}$$
$$= \overline{P}_\omega\{\{\text{〃}\}\mid \text{〃}\}$$
$$= \overline{q}\otimes\overline{P}(\{\varphi_{n+1}, t_{n+1}\}\mid \varphi_n, a_n).$$

そこで，

$$\overline{P}_{\pi^\omega}\{\{a_0, t_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, a_n\}\mid \varphi_0\} = \overline{P}_\omega\{\{\text{〃}\}\mid \varphi_0\}$$

が成りたつ．命題1とその注意より，π^ωが求めるものである．

次に，新しいモデルSMDP-I$(\overline{S}, A, \overline{q}, \overline{P}, \overline{C}_\alpha, \alpha)$を考える．このSMDP-Iの政策は，I-政策と同じものであり，I-政策πによる期待合計割引コストは

$$I_\pi^\alpha(\varphi_0) \equiv E_\pi\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha(t_1+\cdots+t_n)}\overline{C}_\alpha(\varphi_n, a_n)\mid \varphi_0\right]$$

で与えられる．ここで，$E_\pi[\cdot\mid\varphi_0]$は，

$$\overline{P}_\pi\{\cdot\mid\varphi_0\} \equiv \bigotimes_{n=0}^{\infty}(\pi_n\otimes\overline{q}\otimes\overline{P})$$

による条件付期待値である．

<u>定理3.3.</u> 任意のI-政策πに対して，

$$J_\pi^\alpha(\varphi_0) = I_\pi^\alpha(\varphi_0) \quad (\forall\varphi_0)$$

が成りたつ．

<u>証明</u> 定理3.1.より，$(A\overline{S}R_+)^nA$上の条件付確率$\overline{P}_\pi\{\cdot\mid\varphi_0\}$は，次のように分解される．

$$\begin{aligned}\overline{p}_\pi\{\cdot \mid \varphi_0\} &= \overline{p}_\pi\{\{a_0\}\mid \varphi_0\} \otimes \overline{p}_\pi\{\{\varphi_1, t_1\} \mid \varphi_0, a_0\} \\ &\quad \otimes \cdots \otimes \overline{p}_\pi\{\{a_n\} \mid \varphi_0, a_0, t_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \\ &= \pi_0 \otimes \overline{q} \otimes \overline{p} \otimes \cdots \otimes \pi_n \\ &= p_\pi\{\cdot \mid \varphi_0\}.\end{aligned}$$

したがって，注意1と I_π^α の定義より

$$J_\pi^\alpha(\varphi_0) = I_\pi^\alpha(\varphi_0) \quad (\forall \varphi_0)$$

が成りたつ．

以上の2つの定理より，SMDP-II $(S, M, A, p_s, p_x, q, \varphi_0, C, \alpha)$ は，SMDP-I $(\Xi, A, \overline{q}, \overline{p}, \overline{C}_\alpha, \alpha)$ に同値変形されることがわかる．次の命題は，条件1と定理3.1(ii)より明らかである．

命題2.

$$\int_\Xi \overline{p}([0,\delta] \mid \varphi, a, \varphi')\, d\overline{q}(\varphi' \mid \varphi, a) \leqq 1-\varepsilon \quad (\forall \varphi, a)$$

なる $\delta > 0$ と $\varepsilon > 0$ が存在する．

$$I^\alpha(\varphi) \equiv \inf_\pi I_\pi^\alpha(\varphi) \quad (\forall \varphi)$$

とおく．

定理3.4. A は可算集合とする．このとき，$I^\alpha(\varphi)$ は，Ξ 上のボレル可測関数で次の方程式の一意の解である．

$$(3.2) \quad I^\alpha(\varphi) = \inf_{a \in A} \left\{ \overline{C}_\alpha(\varphi, a) + \int_\Xi \int_0^\infty e^{-\alpha t} I^\alpha(\varphi') \times d\overline{p}(t \mid \varphi, a, \varphi')\, d\overline{q}(\varphi' \mid \varphi, a) \right\} \quad (\forall \varphi).$$

この方程式は次のように表わすことができる．

(3.3) $$I^\alpha(\varphi)=\inf_{a\in A}\{\bar{c}_\alpha(\varphi,a)+\sum_s\sum_{s'}\sum_{m'}\int_0^\infty e^{-\alpha t}$$
$$\times I^\alpha(u(\varphi,a,t,m'))\,d\phi_t(t|s,a,s')\,\phi_s(s'|s,a)\,g(m'|s')\varphi(s)\}$$

(3.2) or (3.3) で，もし各 φ について右辺を最小にする行動が存在すれば，そのように定める定常 I-政策 f_α は α-最適である．

証明　MDP-I での Strauch [11] の結果を SMDP-I に適用する．その結果，$I^\alpha(\varphi)$ は絶対可測であることと (ϕ,ε)-最適 I-政策が存在することがわかる．そこで，まず，$I^\alpha(\varphi)$ が (3.2) の解であることを示す．

$$T_a u(\varphi)\equiv \bar{c}_\alpha(\varphi,a)+\int_{\bar{S}}\int_0^\infty e^{-\alpha t}u(\varphi')$$
$$\times d\bar{\phi}(t|\varphi,a,\varphi')\,d\bar{g}(\varphi'|\varphi,a)$$

とおく．命題2より

$$\int_{\bar{S}}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,d\bar{\phi}(t|\varphi,a,\varphi')\,d\bar{g}(\varphi'|\varphi,a)\le 1-\varepsilon+\varepsilon e^{-\alpha\delta}<1$$
$$(\forall\varphi,a)$$

が成りたつことに注意する．

$$I_\pi^\alpha(\varphi_0)=E_\pi\Big[\sum_{n=0}^\infty e^{-\alpha(t_1+\cdots+t_n)}\bar{c}_\alpha(\varphi_n,a_n)\,\Big|\,\varphi_0\Big]$$
$$\ge\sum_{a_0\in A}\phi_{a_0}T_{a_0}I^\alpha(\varphi_0),$$

ここで，$\phi_{a_0}\equiv\pi_0(a_0|\varphi_0)$ $(\forall a_0)$．したがって，

$$I^\alpha(\varphi_0)\ge\inf_{a_0\in A}T_{a_0}I^\alpha(\varphi_0).$$

もう一方の不等式を得るために，まず $t=0$ で a_0 を選択し，続いて $\phi\equiv g(\cdot|\varphi_0,a_0)$ に関する (ϕ,ε)-最適 I-政策 π' を

選択するI-政策をπとする．このとき，

$$I^{\alpha}_{\pi}(\varphi_0) = T_{a_0} I^{\alpha}_{\pi'}(\varphi_0)$$
$$\leqq T_{a_0}(I^{\alpha}+\varepsilon)(\varphi_0)$$
$$\leqq T_{a_0} I^{\alpha}(\varphi_0) + \varepsilon(1-\varepsilon+\varepsilon e^{-\alpha\delta}).$$

したがって，

$$I^{\alpha}(\varphi_0) \leqq \inf_{a_0 \in A} T_a I^{\alpha}(\varphi_0) + \varepsilon(1-\varepsilon+\varepsilon e^{-\alpha\delta}).$$

$\varepsilon > 0$は任意なので，

$$I^{\alpha}(\varphi_0) \leqq \inf_{a_0 \in A} T_{a_0} I^{\alpha}(\varphi_0).$$

ゆえに，$I^{\alpha}(\varphi)$は(3.2)の解である．

次に，$I^{\alpha}(\varphi)$はボレル可測であることを示す．再びStrauch[11]より，(3.2)に対する他の有界な解は存在しないことがわかる．すなわち，$I^{\alpha}(\varphi)$は有界な関数の中での(3.2)の一意な解である．一方，

$$\| \inf_{a \in A} T_a u - \inf_{a \in A} T_a v \| \leqq (1-\varepsilon+\varepsilon e^{-\alpha\delta}) \| u - v \|$$

なので，$\inf_{a \in A} T_a$は有界ボレル可測関数の中で一意の不動点をもつ．ゆえに$I^{\alpha}(\varphi)$はボレル可測である．

次に定理の後半を証明する．定常I-政策fに対して，

$$T_f u(\varphi) \equiv T_{f(\varphi)} u(\varphi) \quad (\forall \varphi)$$

とおく．f_{α}の定義より

$$I^{\alpha}(\varphi) = T_{f_{\alpha}} I^{\alpha}(\varphi) \quad (\forall \varphi).$$

一方，$I^{\alpha}_{f_{\alpha}}(\varphi)$は，

$$I^{\alpha}_{f_\alpha}(\varphi) = T_{f_\alpha} I^{\alpha}_{f_\alpha}(\varphi) \quad (\forall \varphi)$$

の一意な解である．したがって，

$$I^{\alpha}_{f_\alpha}(\varphi) = I^{\alpha}(\varphi) \quad (\forall \varphi).$$

ゆえに，f_α は α-最適である．

最後に，(3.2) と (3.3) が同値であることを示す．g は (φ, t) に関して有界なボレル可測関数とする．このとき，定理 3.1 より

$$\int_{\overline{x}} \int_0^\infty g(\varphi', t)\, d\overline{\Phi}(t \mid \varphi, a, \varphi')\, d\overline{Q}(\varphi' \mid \varphi, a)$$
$$= \sum_s \sum_{s'} \sum_{m'} \int_0^\infty g(u(\varphi, a, t, m'), t)\, d\Phi_t(t \mid s, a, s')$$
$$\times \Phi_s(s' \mid s, a)\, q(m' \mid s')\, \varphi(s)$$

が成りたつ．すなわち，(3.2) と (3.3) は同値である．

§4. 平均基準

これまでは，割引コスト基準の SMDP-II について述べたが，ここでは平均コスト基準の SMDP-II について述べる．平均コスト基準の SMDP-II も §2 と同様に $(S, M, A, \Phi_s, \Phi_t, q, c)$ で定義する．割引因子 α はもはや必要なくなる．また，政策 ω を用いたときの期待平均コストは

$$\overline{J}_\omega(\varphi_0) \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{E_\omega\left[\sum_{i=0}^{n-1} c'(t_{i+1}, s_i, a_i) \mid \varphi_0\right]}{E_\omega\left[\sum_{i=1}^{n} t_i \mid \varphi_0\right]}$$

で与えられる．ただし，

$$c'(t_{i+1}, s_i, a_i) \equiv \int_0^{t_{i+1}} c(t, s_i, a_i)\, dt$$

とし，以下 c' は有界とする．

$$\overline{J}_{\omega^*}(\varphi_0) \leqq \inf_{\omega} \overline{J}_{\omega}(\varphi_0) \quad (\forall \varphi_0)$$

が成りたつとき，ω^* は平均最適であるという．

$$c(s,a) \equiv \sum_{s'} \int_0^\infty c'(t,s,a)\, d\phi_t(t|s,a,s')\, p_s(s'|s,a)$$

$$\tau(s,a) \equiv \sum_{s'} \int_0^\infty t\, d\phi_t(t|s,a,s')\, p_s(s'|s,a)$$

とおくと，

$$\overline{J}_{\omega}(\varphi_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{E_\omega\left[\sum_{\lambda=0}^{n-1} c(s_\lambda, a_\lambda) \,|\, \varphi_0\right]}{E_\omega\left[\sum_{\lambda=0}^{n-1} \tau(s_\lambda, a_\lambda) \,|\, \varphi_0\right]}$$

が成りたつ．更に，

$$\overline{c}(\varphi, a) \equiv \sum_s c(s,a)\, \varphi(s)$$

$$\overline{\tau}(\varphi, a) \equiv \sum_s \tau(s,a)\, \varphi(s), \quad \varphi \in \overline{\Xi},$$

とおく．

定理4.1.

(a) $\overline{E}_\omega[c(s_n,a_n)|\varphi_0] = \overline{E}_\omega[\overline{c}(\varphi_n,a_n)|\varphi_0]$

(b) $\overline{E}_\omega[\tau(s_n,a_n)|\varphi_0] = \overline{E}_\omega[\overline{\tau}(\varphi_n,a_n)|\varphi_0] \quad (\forall \varphi_0)$

が成りたつ．

証明

$$\overline{E}_\omega[c(s_n,a_n)|\varphi_0]$$

$$= \int_{S\overline{\times}A} c(s_n,a_n)\, d\overline{P}_\omega\{(s_n,\varphi_n,a_n)|\varphi_0\}$$

$$= \int_{\overline{\Xi}\times A} \sum_{s_n} c(s_n,a_n)\, \overline{p}_\omega\{s_n|\varphi_0,\varphi_n,a_n\}\, d\overline{P}_\omega\{(\varphi_n,a_n)|\varphi_0\}$$

$$= \int_{\bar{E}A} \bar{c}(\varphi_n, a_n)\, d\bar{P}_\omega\{(\varphi_n, a_n) \mid \varphi_0\}$$
$$= \bar{E}_\omega[\bar{c}(\varphi_n, a_n) \mid \varphi_0].$$

これに対しても同様に成りたつ.

注意2. これは, I-政策 π に対しても成りたつ.

定理4.2. 任意の政策 ω に対して, 次の (a), (b) を満す I-政策 π が存在する.

(a) $\bar{E}_\pi[\bar{c}(\varphi_n, a_n) \mid \varphi_0] = \bar{E}_\omega[\bar{c}(\varphi_n, a_n) \mid \varphi_0]$

(b) $\bar{E}_\pi[\bar{\tau}(\varphi_n, a_n) \mid \varphi_0] = \bar{E}_\omega[\bar{\tau}(\varphi_n, a_n) \mid \varphi_0]$ $(\forall \varphi_0)(\forall n)$

証明は定理3.2と同様にできる.

平均コスト基準のSMDP-Iも §3 の後半と同様に $(\bar{E}, A, \bar{q}, \bar{P}, \bar{c})$ で定義する. また, I-政策 π を用いたときの期待平均コストは,

$$\bar{I}_\pi(\varphi_0) \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{E_\pi[\sum_{i=0}^{n-1} \bar{c}(\varphi_i, a_i) \mid \varphi_0]}{E_\pi[\sum_{i=1}^{n} \tau_i \mid \varphi_0]}$$
$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{E_\pi[\sum_{i=0}^{n-1} \bar{c}(\varphi_i, a_i) \mid \varphi_0]}{E_\pi[\sum_{i=1}^{n} \bar{\tau}(\varphi_i, a_i) \mid \varphi_0]}$$

で与えられる. ここで右之の等式は, $\bar{\tau}$ の定義と定理3.1より成りたつことに注意する.

定理4.3. 任意の I-政策 π に対して

$$\bar{J}_\pi(\varphi_0) = \bar{I}_\pi(\varphi_0) \quad (\forall \varphi_0)$$

が成りたつ.

証明は定理3.3と同様にできる.

以上の2つの定理より，平均コスト基準のSMDP-II $(S, M, A, \pi_s, \pi_a, \gamma, c)$ は SMDP-I $(\Xi, A, \gamma, p, \tilde{c})$ へ同値変形されることがわかる．なお，平均最適なE-政策が存在するための十分条件については，Wakuta [12] が議論している．

参考文献

[1] Åström, K. J.(1965). Optimal control of Markov processes with incomplete state information. J. Math.Anal.Appl. 10, 174-205.

[2] Bellman, R.(1968). New classes of stochastic processes. J. Math. Anal. Appl. 22,602-617.

[3] Blackwell, D.(1965). Discounted dynamic programming. Ann. Math. Statist. 36, 226-235.

[4] Dynkin, E. B.(1965). Controlled random sequences. Theory Probability Appl. 10, 1- 14.

[5] Kurano, M.(1977). On the existence of an optimal stationary I-policy in non-discounted Markov decision processes with incomplete state information. Bull. Math. Statist. 17, 75-81

[6] Rhenius, D.(1974). Incomplete information in Markovian decision models. Ann. Math. Statist. 2, 1327-1334.

[7] Sawaki, K. and A. Ichikawa.(1978). Optimal control for partially observable Markov decision processes over an infinite horizon. J. Oper. Res. Soc. Japan, 21,1-16.

[8] Sawaragi, Y. and T. Yoshikawa.(1970). Discrete time Markov decision processes with incomplete state observation. Ann. Math. Statist. 41,78-86.

[9] Shiryaev, A.N. Some new results in the theory of controlled random sequences.

[10] Sondik, E.(1978). The optimal control of partially observable Markov processes over the infinite horizon; Discounted costs. Oper. Res. 26, 282-304.

[11] Strauch, R.E.(1966). Negative dynamic programming. Ann. Math. Statist. 37, 871-890.

[12] Wakuta, K.(1980). Semi-Markov decision processes with incomplete state observation - Average cost criterion-. J. Oper. Res. Soc. Japan. 24, 95-108.

[13] White, C.C.(1976). Procedure for the solutions of a finite horizon, partially observed, semi-Markov optimization problem. Oper. Res. 24, 348-358.